



**SABERES
DOCENTES**

CENTRO DE ESTUDIOS
Y DESARROLLO DE
EDUCACIÓN CONTINUA
PARA EL MAGISTERIO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES • UNIVERSIDAD DE CHILE



RECURSOS PARA EL TRABAJO EDUCATIVO

PUBLICACIÓN 14 :: Agosto :: 2021::

EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN Y SUS REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE 8° AÑO BÁSICO DE ESCUELAS MUNICIPALES. RESUMEN DE TESINA DE POSTÍTULO

ALEJANDRO NÚÑEZ SEPÚLVEDA
ALEJANDRO ARRUEZ
SORHABURU
JORGE SALAZAR LABRA



Presentación

La Universidad de Chile, a través del Centro Saberes Docentes, realiza una labor permanente de apoyo al desarrollo profesional docente, considerando diferentes esfuerzos. Uno de ellos son los postítulos de especialización para docentes de Educación General Básica, considerando diferentes menciones. Al finalizar su proceso formativo, los y las estudiantes llevan a cabo trabajos finales, donde realizan aportes relevantes para su desarrollo profesional y para sus propias disciplinas.

El Centro Saberes Docentes ha querido relevar estos trabajos, como una forma de destacar el proceso vivido por sus estudiantes y el conocimiento generado esta instancia formativa. Por esta razón, este recurso contiene una síntesis de una tesina de postítulo, elaborada por un alumno o una egresada de estos programas.

TÍTULO DE LA TESINA: EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN Y SUS REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE 8° AÑO BÁSICO DE ESCUELAS MUNICIPALES.

1. Problemática pedagógica

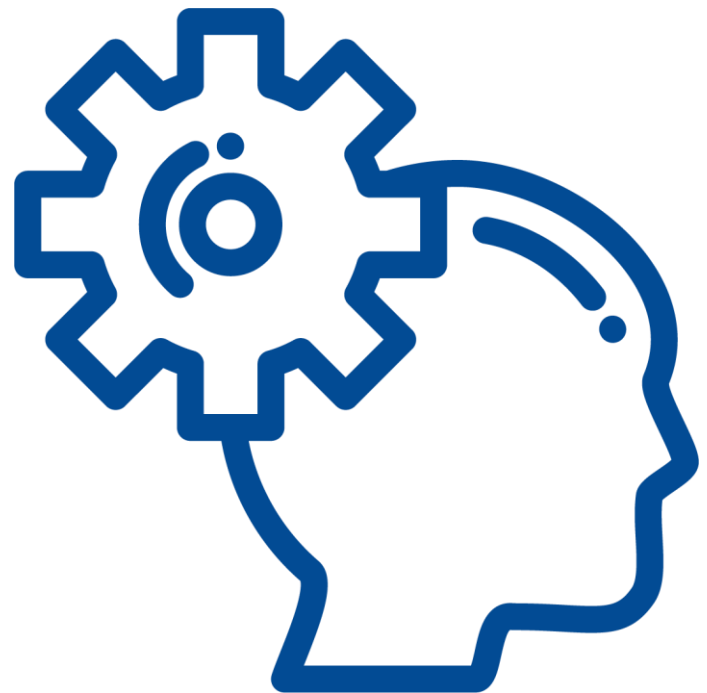
La enseñanza del álgebra en Educación Básica requiere de una parte importante del tiempo destinado al trabajo de los cuatro ejes de la asignatura de Matemática. El primer acercamiento formal que tienen los estudiantes se da en el primer ciclo, para luego abordar su enseñanza más fuertemente a partir de 5° año básico, a través del lenguaje algebraico y desarrollo de ecuaciones. Sin embargo, es al finalizar este ciclo y el tránsito hacia la Educación Media donde existe un mayor trabajo algebraico en comparación a otros niveles de la enseñanza básica, y en que también se observan las mayores dificultades de comprensión de las expresiones algebraicas. En este contexto, un concepto matemático angular para la construcción de nuevos conocimientos es el de función y sus representaciones, el que ocupa la mayor cantidad de horas de trabajo en el aula de acuerdo al Programa de 8° Básico.

La enseñanza usual de la función está apoyada por las actividades propuestas en el Texto del Estudiante 8° básico, las que suelen utilizar contextos rutinarios y no rutinarios para insertar un problema que debe ser resuelto mediante alguna modelación y la completitud de datos de una tabla de valores, de acuerdo al reemplazo del valor de una variable. Vidal y Barra (2019) observaron estas situaciones en los textos escolares, principalmente en el eje de Álgebra, donde se presentan argumentaciones con un único ejemplo concreto y donde las reglas y algoritmos no son justificadas. Por otra parte, el Texto del Estudiante ofrece también actividades con el uso de software como Geogebra o actividades en hojas de cálculo como Excel. Sin embargo, estas actividades no siempre consideran diversas formas de aprender y no centran la atención en el uso de los elementos que el/la estudiante dispone en su medio, o bien en ocasiones no ofrecen situaciones de aprendizajes desafiantes que consideren los contextos en que ellos están insertos, ya que las realidades de los estudiantes son muy distintas a lo largo del país.

En este sentido, Pino y Blanco (2008) señalan a partir del análisis de problemas presentes en los textos escolares chilenos, que el tipo de tarea matemática más utilizada en los textos es la referida a aplicar un algoritmo o procedimiento y, en menor medida, identificar y completar, siendo una parte mínima de tareas asociadas a una estrategia heurística. Destacan además, la importancia de la vida cotidiana y el entorno del niño, como partes del proceso de experimentación y aprendizaje activo, por medio de actividades lo más cercanas posibles a la realidad y que requieran uso de habilidades, conceptos y procedimientos con el fin de organizar los datos y tomar decisiones en la búsqueda de una respuesta a la situación planteada.

A raíz de esta problemática, se realizó un estudio que concluye con la planeación de una secuencia didáctica que favorece y promueve el aprendizaje enactivo (Bruner, 1966) del concepto de función como objeto matemático, fundamentado en el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didáctica de Guy Brousseau, enfocado para estudiantes de dos escuelas municipales de alto índice de vulnerabilidad de Santiago y Valparaíso.

Se entenderá la enacción en Matemática, en palabras de Soto-Andrade (2015), como la representación enactiva de un dominio u objeto cognitivo a través de un conjunto de acciones apropiadas para alcanzar un cierto resultado, en contraste con la representación icónica y la representación simbólica.



2. Marco referencial

El marco de referencia utilizado en este estudio se basa en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) del francés Guy Brousseau, que surge en los años 70 y que se difunde en América Latina a partir de los años 80. Según Brousseau (2007), los estudiantes deben desenvolverse en un medio que es planeado minuciosamente por el docente. En éste deben ponerse en juego sus conocimientos frente a un problema o actividad desafiante, que implique el tránsito a través de 4 fases: acción, formulación, validación y una última, que es liderada por el docente, la que consiste en una institucionalización de lo realizado.

La TSD toma como base los trabajos realizados por investigadores, matemáticos y psicólogos que buscaban describir cómo aprenden los estudiantes y las variables que inciden en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los conceptos. En este contexto, los trabajos de Piaget (1969), Vygotski (1993) y Skinner (1973), entre otros, han sentado las bases del estudio sobre la evolución y desarrollo del pensamiento, las etapas cognitivas y las dinámicas de interacción social del sujeto.

Desde la didáctica de la matemática, autores como Chevallard (1991) y D'Amore (2014), consideran que el proceso de aprendizaje abarca dos procesos claramente definidos y que contribuyen al desarrollo del sujeto: la cultura y la adaptación independiente. El primero se relaciona al contexto en el que se desenvuelve el estudiante, es decir, al ambiente escolar y la actividad en acción, donde se ponen en juego conocimientos, habilidades, destrezas y creencias que sustentan el desarrollo de una tarea matemática, y que es resuelta a través del trabajo con sus pares y las devoluciones del profesor. El segundo, se refiere a una necesidad intrínseca de homeóstasis, donde el estudiante busca un equilibrio cognitivo, y para ello, debe manejar el medio satisfaciendo alguna problemática y superando obstáculos que se presentan como factores de desequilibrio cognitivo, demandando por parte del estudiante, acciones basadas en su conocimiento y la toma de decisiones correctas para hallar una solución a una tarea dada.

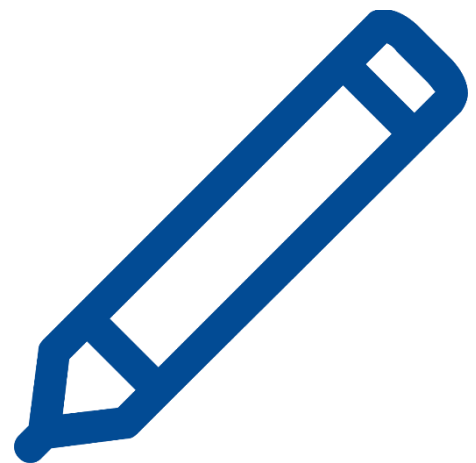
La TSD se basa en la situación que involucra la actividad del profesor y la del estudiante, incluido el entorno en donde se desarrolla el trabajo cognitivo. El estudiante se desenvuelve en el medio con el que interactúa. El medio debe devolver al estudiante la posibilidad de usar la sanción como forma de orientar sus elecciones y se transforma en un dispositivo que ofrece un antagonismo respecto a la acción del estudiante. Brousseau (2007) explica las cuatro fases que se dan en la situación, a saber:

- 1) *Fase de Acción*, aquella en la que el estudiante realiza una actividad y en la que es protagonista de su aprendizaje, observando, manipulando e interactuando con los materiales que ofrece el medio. En esta actividad, el estudiante responde a los desafíos que provienen del medio, de acuerdo a sus conocimientos previos y también en base a su experiencia e intuición.
- 2) *La fase de Formulación*, que se compone de dos momentos, el primero, cuando uno de los estudiantes está en la fase de acción y el resto está atento a lo que se está desarrollando, observa lo que ocurre cuando el primer estudiante elige o da ciertas respuestas. Aquí el estudiante elige libremente cómo interactuar con su medio y obtener una respuesta de cómo este reacciona, de esta manera, recaba información (retroalimentación) que permitirán adquirir o modificar conocimientos y promover así el aprendizaje. A este conjunto de acciones e interacciones entre el estudiante y su medio, que lleva a la búsqueda de soluciones, se le conoce como enacción. Soto-Andrade (2015) se refiere a esto basándose en Bruner bajo la idea del *aprender haciendo*. Dice además que, “abordajes radicalmente enactivos y

corporizados a la cognición pueden ser exitosos para comprender y propiciar el aprendizaje de la matemática”.

El segundo momento implica una discusión del estudiante con sus pares o su equipo de trabajo para compartir información y analizar en la búsqueda de soluciones. En este momento los estudiantes participan activamente para compartir estrategias u observaciones frente al trabajo realizado por uno de ellos. Se ponen en juego distintos puntos de vista y se formulan hipótesis respecto a la solución de la problemática, las que deben aplicarse para lograr la sanción, determinando la efectividad de ella. Hacen uso del conocimiento obtenido y el que ya poseen, para una nueva respuesta que satisfaga el desequilibrio cognitivo que provoca la actividad. Este conocimiento se debe comunicar a sus pares, formular (verbalizar y escribir) entonces la idea. “Es necesario introducir en el contrato que el profesor puede dar problemas que tengan una, ninguna, muchas o infinitas soluciones y que son los propios estudiantes los que deben analizar y justificar esto” (Vidal, 2009).

- 3) En la *fase de validación*, los estudiantes deben tomar parte por una estrategia y formular una idea con argumentos y bases válidas que permitan defender su punto de vista y trabajo realizado frente a otras respuestas. Se trata entonces de que exista una cooperación hacia la búsqueda de la verdad, vinculando un conocimiento a un campo de saberes que ya es conocido y aceptado. Si existiera una diferencia o duda con alguna de las partes que está comunicando su idea, se contraponen los argumentos y se demuestran mediante la aplicación de su idea o proposición en acción con el medio.
- 4) Por último, y ante la necesidad del profesor de dar cuenta lo realizado por los estudiantes, surge la *institucionalización*, que es aquella fase donde el docente identifica un objeto de enseñanza, y le da un estatus, acercando las producciones y conocimientos de los estudiantes a los aprendizajes esperados del programa y a otras áreas. Se compone por los saberes que se ponen en juego por parte de los estudiantes y aquellos que ha descubierto en la actividad. Este aprendizaje profundo conlleva la adquisición de un concepto que no será fácil de olvidar y que se ve reforzado por la acción del docente.



3. Contexto de realización del estudio

El estudio se llevó a cabo en dos octavos básicos de escuelas municipales de Santiago y Valparaíso. La primera contaba con un 95% de índice de vulnerabilidad al año 2019. La segunda escuela es un centro educativo que atiende a estudiantes de alta vulnerabilidad pedagógica, siendo su índice declarado de 81%.

En el caso de la primera escuela, se consideró un curso de 43 estudiantes, de los cuales 21 son hombres y 22, mujeres. La gran mayoría de ellos viven en las poblaciones circundante de la escuela, provienen de familias cuyos jefes de hogares han completado enseñanza básica y algunos menos, enseñanza media y que pertenecen a un nivel socioeconómico bajo, según datos del último SIMCE aplicado. Respecto a los estudiantes, un 12% del curso pertenece al Programa de Integración Escolar. Muy pocos estudiantes cuentan con un computador en casa para acceder a internet ni tampoco libros para estudiar, a excepción de los textos entregados por JUNAEB.

Por su parte, en el caso de la segunda escuela, se consideró el único octavo básico de la escuela, cuya matrícula es de 8 estudiantes.

4. Diagnóstico y su metodología

El estudio utilizó una componente cualitativa, que integró la observación del trabajo en clases de los estudiantes a través de una bitácora, el uso de guías de trabajos en las que debían responder una serie de actividades, justificar sus respuestas y dejar testimonio del plan de resolución o los argumentos matemáticos que determinaron sus respuestas. También se hizo uso de una componente cuantitativa, a partir de los datos obtenidos de una prueba final de Unidad, que incluyó distintos ítems enfocados a medir el desempeño de los estudiantes para cada objetivo planteado en el diseño didáctico.

Para determinar el estado inicial de los estudiantes frente a sus conocimientos previos que eran necesarios para abordar funciones, se aplicó una evaluación diagnóstica que consistió en un *pretest* de 18 puntos compuesto por 4 ítems ejercicios, que abarcaban proporcionalidad, lenguaje algebraico, patrones y series numéricas, y lectura de tablas y gráficos.

Los puntos que se evaluaron fueron:

- 1) Determinar regla o patrón de una serie numérica en tabla de valores y escribirla como una expresión algebraica.
- 2) Indicar si existe una relación de proporcionalidad directa entre las variables de 5 situaciones distintas.
- 3) Resolver una situación problemática que involucra una proporcionalidad directa entre sus variables.
- 4) Continuar la secuencia geométrica de los cuadrados que se forman con palitos de fósforos, a partir del patrón que se debe determinar y luego reflexionar frente a ello, la cantidad de fósforos para “x” cuadritos y la presencia de variables y su relación de dependencia.

A partir de los resultados obtenidos del *pretest*, se pudo identificar que en ambos cursos donde se implementó el diseño didáctico, existían falencias respecto a la comprensión del álgebra. Por lo general, el trabajo de este

eje se ve limitado a una memorización de contenidos y una rutinaria práctica de procedimientos poco reflexivos, donde la mayoría de los estudiantes no comprende el uso de variables y expresiones algebraicas como una forma de representar relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. Esto se evidencia en que las actividades del punto 1) obtienen solo un 37% de logro, destacando que en los patrones donde el término general es del tipo $n+5$ tiene mejores resultados que aquellos del tipo $n/2+1$. El punto 2) obtiene un 64%, logrando identificar situaciones directamente proporcionales, pero evidencian un obstáculo respecto a la interpretación del crecimiento de una planta y el número de días, obviando la importancia de una constante. En el punto 3) solo un 24% de respuestas correctas utilizando métodos algorítmicos no tradicionales a los que aparecen en los textos de estudio y el punto 4) un 46% de logro, identificando la cantidad de fósforos para una cantidad observable de cuadrados, pero no logran determinar una regla que permita hallar la cantidad para una cantidad de cuadrados que no es observable o contable.

5. Propuesta didáctica

Una vez aplicado el pretest, se propuso un trabajo organizado en 4 sesiones de 90 minutos cada una, bajo el modelo de la TSD. Para cada una de ellas, se planteó un trabajo colaborativo en parejas, en la interacción con un medio en la que se hayan dispositivos que permitan desafiar los conocimientos de base que poseen respecto al álgebra y el cálculo de distintas operaciones aritméticas, mediante el abordaje de una situación problema y el uso de cubos unifix como material concreto.

En la primera clase, se plantea una tarea relacionada con una acción que se repite en el tiempo, pero que posee un elemento que varía. Se espera que el estudiante logre identificar un patrón en la secuencia, siendo capaz de continuarla en forma enactiva, para luego, representarla pictóricamente.

Posteriormente, se propicia la reflexión mediante una etapa de formulación en la que, con su compañero/a de puesto, deben responder algunas preguntas y luego hallar una expresión algebraica para representar el patrón o regla que permitió encontrar los valores solicitados. Esto es una forma en que se introduce a la noción de función, desde una transposición didáctica, donde el objeto de saber fue manipulado de tal forma que se vuelva accesible y comprensible para los estudiantes como objeto de enseñanza, como lo plantea Chevallard (2013).

La sesión dos, comienza con una breve actividad de motivación por medio de preguntas aleatorias (estrategia de palitos preguntones), respecto a las ideas previas que lleven a formular una posible definición de la función como objeto matemático. La actividad se centra en el uso de cubos unifix y una guía para resolución en parejas, en que la socialización del conocimiento es clave, permitiendo dar sentido a la construcción del objeto matemático, por medio de la argumentación y la comunicación de sus ideas respecto a lo que se solicita y el cómo abordan la problemática. Esto llevará a entender cómo se relacionan los conocimientos matemáticos previos en la búsqueda del equilibrio cognitivo y la satisfacción de responder eficientemente los desafíos de la guía.

En la tercera clase, los estudiantes trabajan con un material recortable, donde deberán asociar las distintas formas de representación de funciones (expresión algebraica, tabla de valores, diagrama de Venn y gráfico). Se introducen los conceptos de Dominio y Recorrido de la función, además de pares ordenados para el gráfico. Este trabajo es una síntesis poderosa de lo realizado hasta el momento, donde asocian cada representación bajo una misma función entre las distintas que se proponen. Esta actividad pone en juego los distintos saberes

adquiridos respecto a definiciones, ejemplos, metáforas, cálculo, representación y resolución de problemas. D'Amore (2014) señala que el aprendizaje se presenta en distintos tipos: Conceptual, como las definiciones de función, formas de representación, plano cartesiano, dominio y recorrido de la función, tipos de funciones, etc. En lo algorítmico, en este caso, en la operación aritmética a efectuar según la expresión algebraica de la función; aprendizaje estratégico, como resolución de problema; comunicativo, en los espacios de argumentación y validación de ideas; finalmente, aprendizaje de la gestión, en el uso de diversos registros semióticos para la representación de funciones en que se enfoca el trabajo de esta clase.

Finalmente, en la sesión cuatro, los estudiantes responden un *postest* respecto a la noción y representaciones de la función, desarrollando un instrumento de base mixta con cuatro ítems diferentes, balanceados según la taxonomía de Bloom bajo los objetivos de la unidad en que se enmarca este diseño didáctico.



6. Resultados de la propuesta didáctica

Los resultados obtenidos del post test aplicado a los cursos, luego de la implementación didáctica, evidenciaron un porcentaje de logro global de la prueba de un 70%, siendo el ítem con mayor aprobación el de respuestas breves, seguido por el ítem de desarrollo que consistía en el uso de las representaciones de funciones vistas en las clases de la secuencia didáctica. El ítem de menor aprobación corresponde al ítem III, de respuestas de selección única, relacionadas con la identificación de una función afín, características del gráfico correspondiente y la evaluación de sus variables de entrada y salida.

El 90% de los estudiantes contestó correctamente el ítem I, que implicaba recordar los conceptos y palabras claves del contenido. Las preguntas están relacionadas con las definiciones de los modelos de representación (tabla, diagrama de Venn, máquina, gráfico y expresión algebraica respectivamente). Esto quiere decir que las estrategias utilizadas para el aprendizaje de los modelos de representación de funciones fueron apropiadas y útiles para los estudiantes, de tal forma que se volvió significativo aprender los conceptos e identificarlos. No obstante, a pesar de conocer el significado de los tipos de representaciones, un poco más de la mitad de los estudiantes de los cursos lograron identificar el concepto de función, siendo un aspecto clave en este aprendizaje. En este sentido, se infiere que, al estar las actividades que se llevaron a cabo más centradas en la habilidad de representar, los estudiantes hayan comprendido las formas de establecer relaciones entre valores de un grupo a otro, pero haya faltado el refuerzo del concepto en cada una de las sesiones.

En los ítems II y III los estudiantes obtuvieron un desempeño que aproximado del 70%. Se consideran preguntas con distintos niveles de dificultad y pone en juego las habilidades descritas en la taxonomía de Bloom, que se centran en la comprensión y la aplicación de conceptos y conocimientos relacionados con los modelos de representación y las nociones básicas de dominio y recorrido. Así también, obtuvieron sobre el 60% de aprobación preguntas respecto al diagrama de Venn, la función metafóricamente representada como una máquina. Un menor porcentaje de logro alcanzaron las respuestas a las preguntas que se refieren a la observación de una tabla incompleta para la función $f(x) = 10x - 5$, que cuenta con números enteros como valores de entrada. Aunque los estudiantes hayan demostrado en otras preguntas similares comprensión respecto a este tipo de representación, se identifica que el error que cometieron está dado por la omisión de la regla de signos en Z, marcando en su mayoría la alternativa que considera a 25, en lugar de -25.

Por último, en el ítem IV de desarrollo, el 90 % de los estudiantes demostraron habilidades y conocimientos para sintetizar lo aprendido en las sesiones, a través de la completación de tablas de valores, escritura de dominio y recorrido, identificación del tipo de función, construcción de gráfico en plano cartesiano de manera manual, creación de tabla y ubicación de pares ordenados, a partir de una expresión algebraica que denota una función lineal y otra que solicita la expresión afín.

7. Conclusiones

El aprendizaje respecto a un objeto matemático está influenciado por varios factores, desde el conocimiento previo que tenga el estudiante, su forma de observar su realidad, la mirada del profesor o profesora frente a la matemática, e incluso el programa político que se quiera implementar desde el gobierno que decide lo que se aprende, cuándo y cómo, ejerciendo su rol como parte de la noosfera. Todos estos factores y muchos otros, intervienen en la diaria práctica pedagógica, sin embargo, es necesario que el docente tenga conciencia y conocimiento de estos elementos y de la realidad de sus estudiantes, sus motivaciones y habilidades, además de conectar estas características con el objeto de aprendizaje.

La didáctica de la matemática nos entrega herramientas para poder acercar los objetos matemáticos a los estudiantes, de llevar el conocimiento del saber sabio a un saber a enseñar, donde la transposición didáctica juega un papel fundamental y el rol del docente es clave para organizar el medio de aprendizaje y construir una situación didáctica que considere obstáculos epistemofílicos como epistemológicos, a la vez que despierta el interés y compromiso de parte del estudiante a resolver el problema que se propone.

Para el caso de la función, la teoría de situaciones didácticas posibilita la creación de clases efectivas a aplicar a un curso, en cuanto a la adquisición del concepto y sus representaciones. La manipulación de variables didácticas y el planteamiento de los problemas permitió a los estudiantes cuestionar sus conocimientos frente al álgebra y buscar en comunicación con sus compañeros, respuestas a los problemas que se suscitaban en la interacción con su medio y la actividad enactiva que desarrollaron en cada sesión. Los resultados del post test confirmaron el logro del aprendizaje, aunque quedan aspectos por mejorar como afianzar el concepto de función y la representación de esta en un plano cartesiano diseñado por ellos mismos.

Respecto al trabajo desarrollado como docentes, esta experiencia permitió desafiarnos desde un comienzo y a la vez encontrar un espacio de reflexión sobre nuestro quehacer pedagógico, un espacio para compartir y conocer experiencias desde nuestros particulares contextos, a partir de las propias prácticas educativas, con base en estrategias que nos han demostrado tener un impacto positivo en los aprendizajes de nuestros estudiantes.

Como grupo de trabajo, consideramos que este perfeccionamiento ha fortalecido mucho nuestras competencias profesionales para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, entregando diversas oportunidades a nuestros estudiantes.



8. Referencias bibliográficas

- Agudelo, R. y Guerrero, J. (1973). *El Sistema Psicológico de BF Skinner*. Revista Latinoamericana de Psicología, 5(2), 191-216.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Bruner, J. (1966). *Hacia una teoría de la instrucción*. Belknap Press of Harvard University Press.
- Chevallard, Y. (2013). *La transposición didáctica*. Aique
- D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2014). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Iztaccihuatl.
- Piaget, J. (1969). *Psicología del niño*. Ediciones Morata, S.L.
- Soto, A. (2015b). *La didáctica de la matemática vista desde la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile*. *Anales de la Universidad de Chile*, 0 (8), 95-117. doi:10.5354/0717-8883.2015.37311. Recuperado de <https://adnz.uchile.cl/index.php/ANUC/article/download/37311/38862>
- Vidal, R. (2009). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones*. Cuadernos de Educación UAH, 11, 1-7.
- Vidal, R. y Barra, M. (2019). *Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico-algebraico en libros de textos*. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 2(2), 33-49.
- Vygotsky, L.S. (1993). *Pensamiento y Lenguaje*. Aprendizaje Visor.



SABERES DOCENTES

CENTRO DE ESTUDIOS
Y DESARROLLO DE
EDUCACIÓN CONTINUA
PARA EL MAGISTERIO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES • UNIVERSIDAD DE CHILE

